

Командная олимпиада. 4 класс. Решения

6 марта

1. Сегодня первый урок у Димы начался в 8:30, а последний урок закончился в 13:45. Во сколько бы закончился последний урок, если бы все перемены были на 5 минут длиннее, а все уроки — на 5 минут короче?

Ответ. В 13:40.

Решение. Для каждого урока, кроме последнего, уменьшение его продолжительности на 5 минут компенсируется увеличением длительности на 5 минут следующей за ним перемены. Значит, общее время изменится ровно на изменение длительности последнего урока, то есть уменьшится на 5 минут.

2. На столе лежали 10 карточек с цифрами от 0 до 9, по одной цифре на карточке. Аня взяла себе 4 карточки, Боря — 3, Вася — 2, Галя — 1. Может ли оказаться так, что сумма цифр на карточках у Ани меньше, чем у Бори, сумма у Бори — меньше, чем у Васи, а сумма у Васи — меньше, чем цифра у Гали?

Ответ. Нет.

Решение. Наименьшая возможная сумма на карточках Ани равна $0 + 1 + 2 + 3 = 6$. Наибольшая возможная сумма на карточках Гали равна 9. По условию суммы на карточках всех детей должны быть различны, сумма Ани самая маленькая, а сумма Гали самая большая. Следовательно, суммы на карточках в точности равны 6, 7, 8, 9. Тогда сумма чисел на всех десяти карточках должна быть равна $6 + 7 + 8 + 9 = 30$, но по условию это не так: $0 + 1 + 2 + \dots + 8 + 9 = 45$.

3. Мудрец взял 6 чёрных и 6 белых камушков и разложил их в 6 шкатулок, по 2 камушка в каждую. На шкатулках он написал следующее: «Два чёрных», «Два белых», «Есть чёрный», «Есть белый», «Два разных», «Два одинаковых». Затем он позвал своего ученика и сообщил ему, что все шесть надписей на шкатулках неверны. Ученику нужно определить содержимое всех шести шкатулок, но ему разрешено открыть лишь одну из них. Помогите ученику справиться с этой задачей.

Решение. Без открывания шкатулок можно понять, что в первой шкатулке находится хотя бы 1 белый камушек, во второй — хотя бы 1 чёрный, в третьей — 2 белых, в четвертой — 2 чёрных, в пятой — 2 одинаковых, а в шестой — 1 белый и 1 чёрный. Если ученик откроет первую шкатулку, то увидит там либо 2 белых камушка, либо белый и чёрный. В первом случае он однозначно узнает положения 5 белых камушков, следовательно, 2 одинаковых камушка в пятой шкатулке чёрные, а во второй — белый и чёрный. Во втором случае он однозначно узнает положения 5 чёрных камушков, следовательно, 2 одинаковых камушка в пятой шкатулке белые, а во второй — 2 чёрных.

4. Вдоль трассы расположены перевалочные пункты А, Б, В и Г (именно в таком порядке). Дальнобойщик Иван Петрович проехал от пункта Б в пункт В за 2 часа. Когда он приехал в пункт В, то подумал, что если бы он ускорился в 2 раза, то добрался бы из В в Г за два с половиной часа, а если бы он ускорился в 3 раза, то добрался бы из В в А за 1 час и 20 минут. Какое расстояние между пунктами Б и Г,

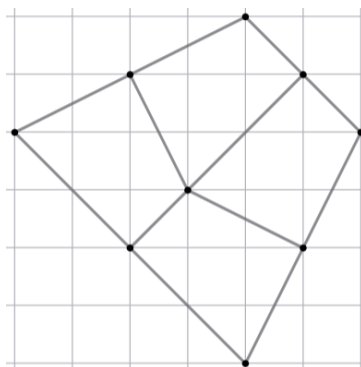
если между А и В оно равно 160 км?

Ответ. 280 км.

Решение. Обозначим расстояние от Б до В за $2x$ (км). Тогда за час дальнотойчик проехал x . Значит от В до Г за 2,5 часа он бы проехал расстояние $5x$, а от В до А за 1 час 20 минут он проехал бы $4x$. Значит $4x = 160$, тогда $x = 40$. Между Б и Г расстояние $2x + 5x = 7x$, что равно 280 км.

5. Разрежьте фигуру на картинке на 4 равные части. Разрезы можно делать **не только** по линиям сетки.

Решение. Пример разрезания на картинке ниже.



6. Знайка задумал 5 разных простых чисел и попросил Незнайку посчитать их сумму. Вместо этого Незнайка посчитал несколько попарных сумм этих чисел и записал их в тетрадь: 1948, 2020, 2026 и 2029. Какая сумма должна была получиться у Незнайки, если бы он выполнил задание правильно? *Простым называется натуральное число, имеющее ровно два различных делителя.*

Ответ. 5026.

Решение. Среди попарных сумм есть нечетная — 2029, значит, одним из простых чисел, придуманных Знайкой, было четное число, то есть 2. Так как придуманные числа различны, и все остальные попарные суммы четные, число 2 ни в каких из них не участвовало. Кроме того, $2029 - 2 = 2027$ — еще одно придуманное Знайкой число, не участвующее в остальных суммах, поскольку превосходит любую из них. Таким образом, осталось три числа, которые могли бы участвовать в трех оставшихся попарных суммах. Сумма этих трех чисел равна $(1948 + 2020 + 2026) : 2 = 2997$, так как при сложении их попарных сумм каждое число будет посчитано дважды. Осталось вычислить сумму всех пяти чисел: $2 + 2027 + 2997 = 5026$.

7. Паша написал на доске несколько двузначных чисел. Их сумма равна 100. Затем он одновременно заменил в них все единицы на пятёрки, пятёрки — на девятки, а девятки — на единицы. Остальные цифры он не менял. Оказалось, что теперь сумма чисел равна 200. Какое наименьшее количество чисел мог написать Паша?

Ответ. 5.

Решение. *Оценка.* Изменение цифры по указанным правилам меняет сумму всех чисел на +4, +40, -8 или -80. Таким образом, если Паша напишет 1 или 2 числа, то

после замен их сумма может увеличиться не больше, чем на 44 и 88 соответственно. Если бы Паша написал три числа, то, чтобы после замен сумма увеличилась на 100, нужно 3 раза использовать +40. Но тогда хотя бы 3 раза придётся уменьшить на 8 — в итоге сумма изменится на 96, а не 100. Если бы Паша написал четыре числа, то +40 должно быть также использовано ровно 3 раза. Помимо этого должно быть 3 раза по −8 и один раз +4. Но тогда в разряде единиц данных чисел будут стоять цифры 9, 9, 9 и одна из цифр 1 и 5. Ни в одном случае сумма четырёх чисел не будет заканчиваться нулём. Следовательно, чисел не меньше 5.

Пример. $19 + 19 + 19 + 21 + 22 = 100$, $51 + 51 + 51 + 25 + 22 = 200$.

8. Гарри выставляет шахматных королей на доске 8×8 по одному. Когда он ставит очередного короля, то проверяет, бьёт ли он каких-то ранее поставленных королей. Если бьёт, то Гарри снимает с доски ровно одного из побитых королей. Какое наибольшее количество королей может оказаться на доске? Цвет королей не имеет значения.

Ответ. 61.

Решение. *Оценка.* Рассмотрим постановку последнего короля, которая не привела к снятию другого. Очевидно, что дальнейшие ходы рассматривать не имеет смысла, так как количество королей на доске после этих ходов не увеличивалось. Заметим, что у этого короля не было соседей. Тогда на доске в этот момент осталось хотя бы три пустые клетки — это минимальное возможное количество соседей короля. Значит, в этот момент времени на доске стоит не более 61 короля.

Пример. Назовем перемещением короля постановку короля в соседнюю по стороне клетку и снятие изначального короля с доски. Будем ставить очередного короля в правый нижний угол, после чего операциями перемещения будем двигать его в нужную клетку. Таким образом сначала полностью заполним королями первый столбец, затем второй, и так далее до шестого столбца. Далее заполним седьмой столбец без двух нижних клеток, а затем восьмой столбец без двух нижних клеток. В конце поставим короля в правый нижний угол и оставим его там.