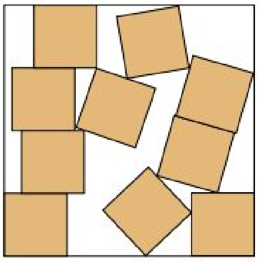
Лига 5. Командная олимпиада. Решения задач

6 марта

1. Квадратные коробки расставлены на полу квадратной кладовой так, как показано на рисунке справа. Чему равна площадь той части пола кладовой, которая не закрыта коробками (белая область на рисунке), если длина стороны каждой коробки равна одному метру?



Ответ. 6 квадратным метрам. **Решение.** Заметим, что длина стороны кладовой равна четырем метрам. Чтобы это доказать, достаточно посмотреть на четыре самых левых коробки на рисунке. Поэтому общая площадь кладовой равна 16 квадратным метрам. Всего есть 10 коробок, каждая из которых занимает площадь в 1 квадратный метр. Поэтому площадь не покрытой части пола равна $16 - 10 = 6$ квадратным метрам.

2. При сложении трёх натуральных чисел Азиз по невнимательности допускает несколько ошибок: в первом числе вместо цифры 7 в разряде сотен он пишет цифру 4, во втором числе вместо цифры 1 в разряде тысяч он пишет цифру 5, а в третьем числе в разряде десятков вместо цифры 9 он пишет цифру 4. Сложив получившиеся (новые) числа, он на этот раз верно получает число 86356. Чему равна сумма исходных чисел?

Ответ. 82706. **Решение.** Из условия следует, что исходное первое число на 300 больше нового первого, второе исходное число — на 4000 меньше нового второго, третье исходное число — на 50 больше третьего нового. Поэтому сумма исходных чисел равна $86356 + 300 - 4000 + 50 = 82706$.

3. На прямой дороге через равные расстояния расположены дом Пети, кинотеатр, школа и дом Васи (именно в таком порядке). В выходной день мальчики вышли из своих домов одновременно и пришли в кинотеатр одновременно, двигаясь с постоянными скоростями. В один из учебных дней мальчики снова выдвинулись одновременно, причем Петя ехал на велосипеде, благодаря чему он увеличил свою скорость на 150 м/мин. Оказалось, что и в этот раз ребята одновременно достигли школы. Найдите пешеходные скорости обоих мальчиков.

Ответ. 50 м/мин у Пети и 100 м/мин у Васи. **Решение.** В тот день, когда мальчики одновременно вышли из домов и одновременно пришли в кинотеатр, Петя прошел в 2 раза меньшее расстояние, нежели Вася. Поэтому пешеходная скорость Пети в 2 раза меньше скорости Васи. С другой стороны в тот день, когда мальчики одновременно прибыли к школе, уже Вася прошел в 2 раза меньшее расстояние, чем Петя. Поэтому скорость Пети на велосипеде в 2 раза больше пешеходной скорости Васи. То есть скорость Пети на велосипеде в 4 раза больше его пешеходной скорости. Поэтому утроенная пешеходная скорость Пети равна 150 м/мин, то есть пешеходная скорость Пети равна 50 м/мин. И соответственно у Васи скорость равна 100 м/мин.

4. У кубика одна грань покрашена в красный цвет, а все остальные — в синий. За один вопрос можно узнать количество синих граней среди любых двух соседних граней.

Можно ли за 3 вопроса определить, какая грань покрашена в красный цвет?

Ответ. Можно. **Решение.** Разобьем все 6 граней кубика на три пары соседних по стороне. Сначала узнаем за два вопроса количество синих граней в двух из этих пар. Тем самым мы узнаем и количество синих граней в оставшейся паре. Заметим, что в двух из трех пар будет 2 синих грани, а в оставшейся паре — одна синяя грань. Тем самым мы уже восстановили $2 \times 2 = 4$ синие грани. Теперь достаточно задать вопрос про пару граней, одна из которых уже заведомо синяя, а другая — одна из оставшейся пары граней. После этого вопроса мы определим ее цвет, а значит, определим цвета всех граней.

5. В дачном посёлке каждый математик ежедневно ходит по грибы, каждый физик — через день, каждый биолог — раз в три дня, а остальные не ходят в лес совсем. Известно, что позавчера в лес ходили 14 человек, а три дня назад — на 1 человека больше, чем сегодня. Сколько человек пойдёт в лес завтра?

Ответ. 15. **Решение.** Пусть в лес ходят M математиков, $P1$ или $P2$ (в зависимости от дня) физиков и $B1$, $B2$ или $B3$ биологов. Так как «три дня назад» и «сегодня» ходила та же самая группа биологов, то $P1 - P2 = 1$. Но «завтра» пойдет та же группа биологов, что и «позавчера», и та же группа $P1$ физиков, что и три дня назад. Поэтому завтра будет на одного человека больше, чем было позавчера, когда ходили $P2$ физиков.

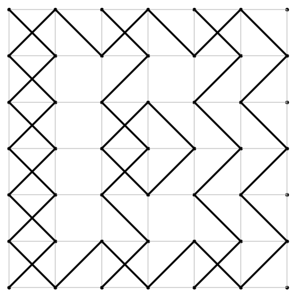
6. У Асана есть 7 карточек, у каждой из которых одна сторона покрашена в красный цвет, а другая — в синий. Он записал на красные стороны карточек 7 различных натуральных чисел. Эти же числа он написал и на синих сторонах карточек. Затем для каждой карточки Асан сосчитал разность чисел на её сторонах (вычитая из большего числа меньшее) и перемножил семь полученных результатов. Могло ли у него получиться число $11\ldots1$ (2026 единиц)?

Ответ. Не могло. **Решение.** Пусть среди чисел на красных карточках чётных чисел больше чем нечётных. Тогда их хотя бы 4. Поэтому и на синих сторонах карточек хотя бы 4 четных числа. Если предположить, что на каждой карточке написано не более чем одно четное число, то всего четных чисел будет не более чем 7 — противоречие. Значит, на обеих сторонах одной из карточек будут написаны четные числа. Поэтому их разность также будет четное. То есть в этом случае у Асана заведомо получится четное число. Аналогично разбирается случай, когда нечетных чисел на красных сторонах карточек больше, чем четных. Но число из 2026 единиц нечетное. Поэтому оно получиться не могло.

Решение 2. Пусть к Асану пришёл Жасан и сделал то же самое, но каждый раз вычитал из числа на красной стороне число на синей (а не из большего меньшее). Тогда каждое число Жасана либо равно числу Асана, либо отличается от него знаком. Но сумма чисел Жасана, очевидно, равна 0, т.е. сумма положительных чисел Жасана равна сумме отрицательных. Но тогда сумма чисел Асана должна быть чётной, а значит, хотя бы одно число Асана чётное. Тогда всё произведение не могло равняться нечётному числу.

7. Сказочная страна представляет из себя клетчатый квадрат 6×6: в нем 49 узелков сетки являются городами, а отрезки сетки между ними — дорогами. Однажды правитель страны решил увеличить количество дорог в стране. Он хочет провести диагонали в некоторых клетках квадрата (в одной клетке можно проводить от 0 до 2 диагоналей) так, чтобы из каждого города выходило не более двух новых дорог. Какое наибольшее количество дорог можно достроить с соблюдением требований правителя?

Ответ. 42. **Решение.** *Оценка.* Любая диагональ соединяет вершины из соседних столбцов, значит, у неё ровно один конец в столбце с нечётным номером. Нечётных столбцов три, и в каждом по 7 городов, — всего 21 город. По условию из каждого города выходит не более двух новых дорог, значит общее число новых дорог не больше, чем $2 \cdot 21 = 42$.



Пример. Провести 42 дороги можно, например, как на рисунке.

8. По кругу стоят 11 человек, пронумерованных числами $1, 2, 3, \ldots, 11$ по часовой стрелке. Каждый из них является рыцарем или лжецом (рыцари всегда говорят правду, лжецы всегда лгут). В один прекрасный день человек с номером 1 заявил: «Я выше одного следующего за мной по часовой стрелке человека», человек с номером 2 заявил: «Я выше двоих следующих за мной по часовой стрелке людей», $\ldots$, человек с номером 10 заявил: «Я выше десяти следующих за мной по часовой стрелке людей». Оставшийся человек заявил, что все остальные люди солгали. Кого в этой компании больше: рыцарей или лжецов?

Ответ. Лжецов. **Решение.** Назовём «заявленными» i-м человеком всех тех, о ком он утверждает, что выше их. Например, человек с номером 4 является заявленным для 2-го, 3-го, 8-го, 9-го и 10-го.

Нетрудно убедиться, что каждый из людей 1–10 заявлен ровно пятью другими людьми (из этого же списка). Посмотрим на самого высокого из них. Тогда все заявления про него ложны, а так как их пять, то среди первых десяти не менее пяти лжецов. Если среди них есть хотя бы один рыцарь, то лжецом будет еще и номер 11, а если среди них рыцаря нет, то номер 11 — единственный рыцарь среди всех. В любом случае, лжецов как минимум 6, то есть больше, чем рыцарей.